

Формулы деления отрезка в заданном отношении

Пусть дан отрезок АВ, который необходимо разделить точкой М в некотором отношении. Причем, известны координаты точек А ($x_A; y_A$) и В ($x_B; y_B$)



Мы будем рассматривать эту задачу как планиметрическую, хотя все выводы справедливы и для пространства.

Для начала рассмотрим простейший случай, когда требуется разделить отрезок на две равные части, то есть, пополам. Формула для деления отрезка пополам достаточно проста и легко запоминается. Выводится она в курсе геометрии 9 класса. Координаты точки М находятся следующим образом:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Теперь пусть точка М делит отрезок АВ так, что отрезок АМ в два раза короче отрезка МВ.



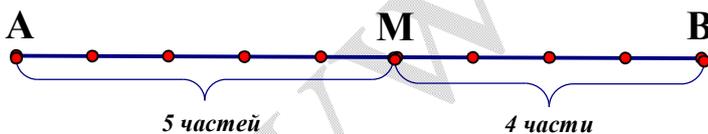
Иначе говоря, точка М делит отрезок АВ в отношении 1:2 (один к двум), считая от вершины А.

Это записывают следующим образом: $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$. Отношение отрезков принято обозначать

греческой буквой λ («лямбда»), то есть в нашем случае $\lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$.

Эту пропорцию можно записать и иначе, а именно: $\lambda = \frac{BM}{AB} = \frac{2}{1} = 2$. Это означает, что отрезок ВМ в два раза длиннее отрезка АМ.

Конечно, отрезок можно делить и в других отношениях. На следующем рисунке отрезок АВ разделен на 9 частей, а точка М делит его в отношении 5:4



Это запишется следующим образом: $\lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{5}{4}$. Или, если составить пропорцию наоборот, то

$$\lambda = \frac{BM}{AM} = \frac{4}{5}$$

Теперь рассмотрим формулы, при помощи которых можно найти координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении.

Итак, если известны две точки плоскости $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$, то координаты точки М, которая делит отрезок АВ в отношении $\lambda = \frac{AM}{MB}$, выражаются

формулами: $x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda}$, $y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda}$. Знание этих формул школьной программой не

предусмотрено, они строго выводятся в курсе аналитической геометрии. Но знать их очень полезно, так можно гораздо проще решать много школьных задач

Пример:

Найти координаты точки М, делящей отрезок АВ в отношении 1:3, если известны точки А(5;3), В (-3; -1)

Решение:

В данной задаче $\lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$. В таком случае по формулам деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda} = \frac{5 + \frac{1}{3} \cdot (-3)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5 - 1}{\frac{4}{3}} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda} = \frac{3 + \frac{1}{3} \cdot (-1)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = 2$$

Ответ: М(3; 2).

Можно решить задачу вторым способом, где отсчет начитается с точки В, тогда $\lambda = \frac{BM}{AM} = \frac{3}{1} = 3$.

$$x_M = \frac{x_B + \lambda \cdot x_A}{1 + \lambda} = \frac{-3 + 3 \cdot 5}{1 + 3} = \frac{12}{4} = 3$$

Тогда

$$y_M = \frac{y_B + \lambda \cdot y_A}{1 + \lambda} = \frac{-1 + 3 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{8}{4} = 2$$

Ответ: М(3; 2).

А теперь задачи для самостоятельного решения:

Даны точки К(-2; 1) и L(5; -6). Найти :

а) точку М, делящую отрезок КL в отношении 2:5

б) точку N, делящую отрезок КL в отношении 4:3

Ответ: М(0; -1) N(2; -3)