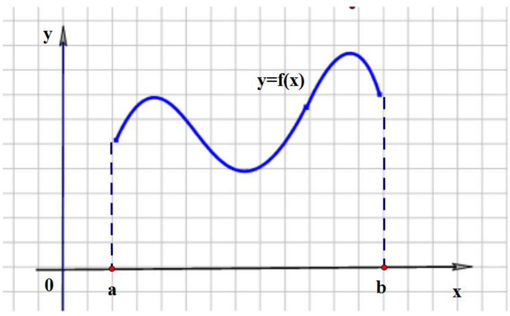
Урок 1. Определенный интеграл.

Геометрический смысл определенного интеграла.

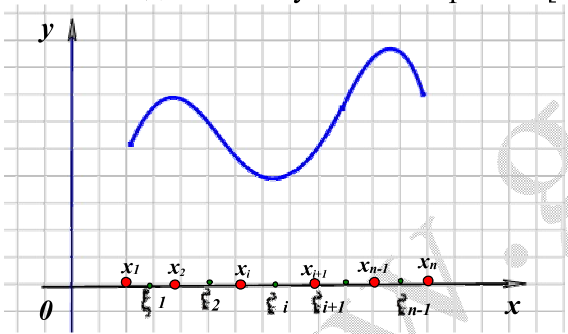
Пусть на отрезке AB задана непрерывная функция $y = f(x)$. Решим практическую задачу. Постараемся найти площадь фигуры, ограниченной сверху графиком некоторой функции $y = f(x)$, слева и справа вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, а снизу осью OX. Такую фигуру в математике называют криволинейной трапецией.

Определение:

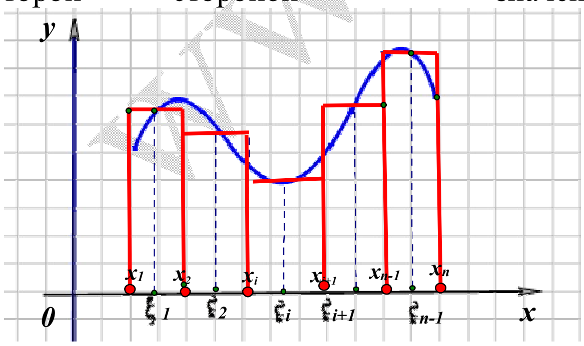
Фигура, ограниченная сверху графиком некоторой функции $y = f(x)$, слева и справа вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, а снизу осью OX, называется *криволинейной трапецией.*



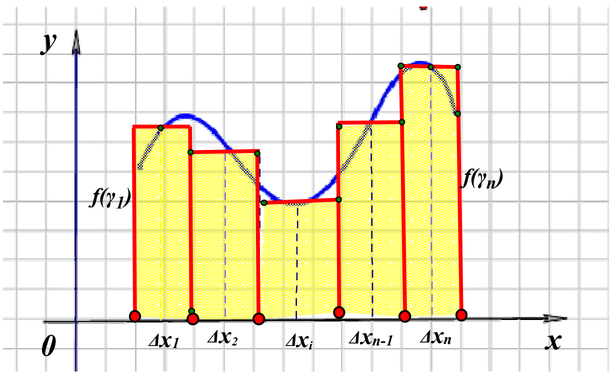
Для этого разобьем отрезок AB произвольным образом с помощью точек $x_1, x_2, \ldots x_n$ и затем в каждом из полученных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ выберем произвольным образом точки ξ_i



Затем построим прямоугольники, основаниями которых являются отрезки $[x_{i-1}; x_i]$, а второй стороной – значения функции в точках ξ_i.



Обозначим Δx_1 длину первого отрезка разбиения, Δx_2 – второго,. Δx_i- i-го отрезка и ,. Δx_n - n-го отрезка. При этом длины вертикальных сторон будут равны значениям функции в точках ξ_i, т.е., $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots f(\xi_n)$.



Площадь каждого прямоугольника выражается через произведение сторон:
$S_i = f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i$. Теперь просуммируем площади всех этих треугольников.
$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_i + \ldots + S_n = f\left(\xi_1\right)\cdot\Delta x_1 + f\left(\xi_2\right)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i + \ldots + f\left(\xi_n\right)\cdot\Delta x_n$
Такую сумму называют интегральной суммой и коротко записывают в следующем виде:
$$S = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i .$$

Определение:
Выражение $\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции $f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a;b\right]$.

Геометрически интегральная сумма равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади криволинейной трапеции.

Теперь вопрос: *как уменьшить погрешность в вычислениях площади криволинейной трапеции?* Понятно, что чем меньше основания прямоугольников, а самих прямоугольников больше, тем точнее мы найдем искомую площадь.

Итак, если мы будем повторять все вышесказанное, но при новых разбиениях отрезка [a;b] добиваться того, чтобы самый большой из отрезков становился все меньше (то есть, стремился к нулю), то число отрезков будет увеличиваться, (то есть, стремиться к бесконечности.) При этом построенная интегральная сумма образует последовательность, которая стремится к некоторому пределу. Это предел и называется *определенным интегралом,* и он геометрически численно равен площади криволинейной трапеции.

Для обозначения определенного интеграла используется следующее обозначение.
$$\int_a^b f\left(x\right)dx .$$
Теперь разберем определенный интеграл, что называется, «по косточкам»
$\int$ - знак интеграла
a – нижний предел интегрирования
b – верхний предел интегрирования
f(x) – подынтегральная функция
f(x)dx – подынтегральное выражение
dx – знак дифференциала.

Итак, мы подошли к самому важному моменту этого урока.

***Определение*:**

Если существует конечный предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i$ при наибольшем Δx_i, стремящемся к нулю $\left(\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i\right)$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка [a;b] на отрезки [x_{i-1}; x_i], ни от выбора точек ξ_i в каждом из них, то этот предел и называется *определенным интегралом функции* $f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a;b\right]$ и обозначается $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$

<u>Вопросы:</u>

1. Что такое криволинейная трапеция?
2. Каким образом выбираются точки x_i при разбиении отрезка [a; b]?
3. Для чего криволинейная трапеция разбивается на прямоугольники?
4. Чему равны длина и ширина каждого прямоугольника?
5. Как выражается площадь каждого из прямоугольников?
6. Какой вид имеет интегральная сумма при вычислении площади криволинейной трапеции?
7. Как уменьшить погрешность в вычислении площади криволинейной трапеции?
8. что такое определенный интеграл?
9. Назовите основные элементы определенного интеграла
10. Какова геометрическая интерпретация определенного интеграла?