# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

***Задача***:

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$

***Решение***:

Применим универсальную тригонометрическую подстановку $tg\left(\frac{x}{2}\right) = t$. Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x = 2arctgt,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}\ .$$

Тогда:

$$\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3\cdot\frac{2t}{1+t^2} - \frac{4\left(1-t^2\right)}{1+t^2}\right)} = \int \frac{2dt}{6t - 4\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{3t - 2\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{3t - 2 - 2t^2}\ .$$

Упростим знаменатель подынтегрального выражения, выделив из него полный квадрат:

$$2t^2 + 3t - 2 = 2\left(t^2 + \frac{3}{2}\right) - 2 = 2\left(\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) - 2 = 2\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} - 2 = 2\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}.$$

Имеем:

$$\int \frac{dt}{3t - 2 - 2t^2} = \int \frac{dt}{2\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t + \frac{3}{4}\right)}{\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{4}}\cdot\ln\left|\frac{t + \frac{3}{4} - \frac{5}{4}}{t + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t - \frac{1}{2}}{t + 2}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}}{tg\left(\frac{x}{2}\right) + 2}\right| + C$$

***Ответ***: $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}}{tg\left(\frac{x}{2}\right) + 2}\right|$ .