Метод замены при решении квадратных уравнений.

Сегодня мы познакомимся с одним из самых распространенных способов решения уравнений, приводимых к квадратным. Это способ замены. Дело в том, что иногда уравнение, которое предстоит решить, выглядит очень страшно и совсем не похоже на квадратное. Но стоит применить подходящую замену, и уравнение «покажет свою квадратность» и сразу становится решаемым.

Условно мы разобьем уравнения на несколько групп, в зависимости от вида замены.

ГРУППА 1:

Уравнения этой группы выглядят так: $ax^4+bx^2+c=0$ ($a\neq 0$).

Если внимательно приглядеться, то можно заметить, что замена $x^2=t$ превращает такое уравнение в обычное квадратное.

Решим уравнение $x^4-9x^2+20=0$. Сделав замену $x^2=t$, получим: $t^2-9t+20=0$, откуда получим корни t=5 и t=4. После этого вернемся к обратной замене и получим, что $x=\pm 2$ и $x=\pm\sqrt{5}$.

При оформлении решения это выглядит так:

$x^4-9x^2+20=0$

Замена: $x^2=t$

$t^2-9t+20=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2=5 \\ x^2=4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2}=\sqrt{5} \\ \sqrt{x^2}=\sqrt{4} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x|=\sqrt{5} \\ |x|=2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{5} \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\sqrt{5},\ \pm 2$

Уравнения такого вида в математике называют *биквадратным*. Как мы видим, биквадратное уравнение может иметь 4 корня, тогда как квадратное уравнение не может иметь больше двух корней. Это происходит потому, что биквадратное уравнение - это частный случай уравнения четвертой степени, и поэтому вполне может иметь больше двух корней.

Решим еще одно биквадратное уравнение: $3x^4+2x^2-5=0$

Замена: $x^2=t$

$3t^2+2t-5=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2}=\sqrt{1} \\ \textit{нет реш.} \end{array}\right. \Rightarrow x=\pm 1$$

Ответ: ± 1

ГРУППА 2 - Эти уравнения можно решить, приняв за *t* целую скобку.

$7(y-2)^4-10(y-2)^2+3=0$

Заменим буквой *t* выражение $(y-2)^2$. Тогда уравнение примет вид:

$7t^2-10t+3=0$.

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{3}{7} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} (y-2)^2=1 \\ (y-2)^2=\dfrac{3}{7} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y-2=\pm 1 \\ y-2=\pm\sqrt{\dfrac{3}{7}} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=2\pm 1 \\ y=2\pm\sqrt{\dfrac{3}{7}} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=1 \\ y=2+\sqrt{\dfrac{3}{7}} \\ y=2-\sqrt{\dfrac{3}{7}} \end{array}\right.$$

Ответ: 3; 1; $2\pm\sqrt{\dfrac{3}{7}}$

ГРУППА 3

Решить уравнение $\left(x^2+5x\right)^2-9\left(x^2+5x-1\right)+11=0$.

Решение: Если выделить одинаковые части уравнения, то получим следующее: $\left(x^2+5x\right)^2-9\left(x^2+5x-1\right)+11=0$. Поэтому применяем замену $x^2+5x=t$. Тогда получим:

$t^2-9\left(t-1\right)+11=0$

$t^2-9t+20=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+5x=5 \\ x^2+5x=4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+5x-5=0 \\ x^2+5x-4=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5\pm3\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{-5\pm3\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$

ГРУППА 4

Это уравнения, которые можно привести к квадратным при помощи замены $|x|=t$

Решить уравнение $b^2-4|b|-21=0$

Решение.

Сначала обратим внимание на то, что b^2 можно записать как $|b|^2$. Тогда уравнение примет вид:

$|b|^2-4|b|-21=0$

Замена: $|b|=t$

$t^2-4t-21=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=7 \\ t=-3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |b|=7 \\ |b|=-3 - \text{ нет решений} \end{array}\right. \quad \Rightarrow |b|=7,\ \ b=\pm7$$

Ответ 7; - 7

ГРУППА 5

Решить уравнение $\left(x^2-4x\right)^2+7\left(x-2\right)^2=16$

Прежде, чем вводить замену, лучше возвести в квадрат второе слагаемое:

$\left(x^2-4x\right)^2+7\left(x^2-4x+4\right)=16$. Теперь это уравнение стало уравнением третьей группы.

Замена $x^2-4x=t$:

$t^2+7\left(t+4\right)=16$

$t^2+7t+12=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=-4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2-4x=-3 \\ x^2-4x=-4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ x^2-4x+4=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ответ: 1; 2; 3