

Тема 16.2. Четырёхугольник – окружность.

1. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

- а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

2. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .

- а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.
б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD .

3. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

- а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.
б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

4. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M , а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N . Отрезки AM и CN пересекаются в точке P .

- а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.
б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 17$.

5. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K .

- а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$
б) Найдите отношение $CK : KE$, если $\angle ECD = 15^\circ$

6. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.

- а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$
б) Найдите площадь треугольника COD , где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD , если известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$ и $BC = 6\sqrt{2}$

7. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

- а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.
б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 2$?

Ответы:

- 1) 3 2) $\frac{85}{3}$ 3) 60 4) $21/5$ 5) 2 6) $18\sqrt{3}$ 7) 1 : 2