

Тема 8.1. Задачи с прикладным содержанием

1. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$ где h – расстояние в метрах, t – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

2. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трех метров?

3. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m – масса воды в килограммах, v – скорость движения ведёрка в м/с, L – длина веревки в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

4. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t – время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ – начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

5. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^\kappa = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, где p – давление газа в паскалях, V – объем газа в кубических метрах, $\kappa = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p , равном $3,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

6. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100} \text{ м}^{-1}$, $b = 1$ – постоянные параметры, $x(\text{м})$ – смещение камня по горизонтали, $y(\text{м})$ – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

7. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 1400 \text{ К}$, $a = -10 \text{ К/мин}^2$, $b = 200 \text{ К/мин}$. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

8. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57 \text{ км/ч}$, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 12 \text{ км/ч}^2$. Расстояние от мотоциклиста

до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$, где t — время в часах.

Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ дайте в минутах.

9. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 20$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 5$ м/с². За t — секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 30 метров. Ответ выразите в секундах.

10. Наблюдатель находится на высоте h , выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$ где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 4 километров? Ответ выразите в метрах.

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{16} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $9,12 \cdot 10^{23}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

12. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \phi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120^\circ / \text{с}$, фаза $\phi = -30^\circ$. Датчик настроен так, что если напряжение в нем не ниже чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

13. Два тела массой $m = 2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 50 джоулей?

14. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_n = 20^\circ \text{C}$ через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_B = 60^\circ \text{C}$ до температуры $T(^{\circ}\text{C})$, причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_B - T_n}{T - T_n}$, где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.

15. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

16. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε – ЭДС источника (в вольтах), $r=1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R – сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

17. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы, определяемой по формуле $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω – частота вынуждающей силы (в с^{-1}), A_0 – постоянный параметр, $\omega_p = 360 \text{с}^{-1}$ – резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5%. Ответ выразите в с^{-1}

18. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0=10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

19. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p=500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v=300$ руб., постоянные расходы предприятия $f=700000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 300000 руб.

Ответы:

- 1) 1 2) 1,2 3) 2 4) 50 5) 0,125 6) 90 7) 2 8) 30 9) 2 10) 1,25 11) 4000 12) 50 13) 60 14) 30
 15) 36
 16) 4 17) 120 18) 25 19) 5000