

Подготовка к ОГЭ

Задание №24

Геометрия.

Задачи на доказательство

1. Треугольники

1. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что треугольники A_1B_1C и ABC подобны.
2. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны.
3. В треугольнике ABC с тупым углом BAC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны.
4. В треугольнике MKP с тупым углом MPK проведены высоты MM_1 и KK_1 . Докажите, что треугольники M_1K_1P и MKP подобны.
5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что углы BB_1A_1 и BA_1A_1 равны.
6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что углы CC_1A_1 и CAA_1 равны.
7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.
8. В остроугольном треугольнике MKP проведены высоты MM_1 и KK_1 . Докажите, что углы MM_1K_1 и MKK_1 равны.
9. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.
10. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы AA_1C_1 и ACC_1 равны.
11. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы CC_1B_1 и CB_1B_1 равны.
12. Высоты MM_1 и KK_1 остроугольного треугольника MKP пересекаются в точке O . Докажите, что углы $MM_1A_1B_1$ и ABB_1 равны.
13. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны. Оказалось, что отрезки BD и BE тоже равны. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.
14. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны. Оказалось, что углы AEB и BDC тоже равны. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.
15. На стороне MP треугольника MKP выбраны точки D и E так, что отрезки MD и PE равны. Оказалось, что отрезки KD и KE тоже равны. Докажите, что треугольник MKP – равнобедренный.
16. На стороне AK треугольника ABK выбраны точки D и E так, что отрезки AD и KE равны. Оказалось, что углы AEB и BDK тоже равны. Докажите, что треугольник ABK – равнобедренный.
17. В равнобедренном треугольнике ABC точки M, N, K – середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что треугольник MNK – равнобедренный.
18. В равностороннем треугольнике ABC точки M, N, K – середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что MNK – равносторонний.
19. В равностороннем треугольнике ABC точки M, N, K – середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что $BMKN$ – ромб.
20. В равностороннем треугольнике ABC точки M, N, K – середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что $CKMN$ – ромб.

2. Многоугольники

21. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что отрезки AE и CF равны.
22. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что отрезки BP и DQ равны.
23. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.
24. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и N соответственно. Докажите, что отрезки CL и AN равны.
25. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны CD . Точка M – середина стороны AD . Докажите, что CM – биссектриса угла BCD .
26. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB . Точка K – середина стороны BC . Докажите, что AK – биссектриса угла BAD .
27. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AD . Точка L – середина стороны AB . Докажите, что DL – биссектриса угла ADC .
28. Сторона CD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC . Точка N – середина стороны CD . Докажите, что BN – биссектриса угла ABC .
29. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M , лежащей на стороне CD . Докажите, что M – середина CD .
30. Биссектрисы углов C и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке L , лежащей на стороне AB . Докажите, что L – середина AB .
31. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M , лежащей на стороне AD . Докажите, что M – середина AD .
32. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K , лежащей на стороне BC . Докажите, что K – середина BC .
33. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E . Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.
34. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку F . Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади параллелограмма.
35. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E . Докажите, что сумма площадей треугольников AEB и CED равна половине площади параллелограмма.
36. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку F . Докажите, что сумма площадей треугольников AFB и CFD равна половине площади параллелограмма.
37. В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина стороны CD . Известно, что $EA=EB$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.
38. В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина стороны AB . Известно, что $KC=KD$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.
39. В параллелограмме $KLMN$ точка B – середина стороны LM . Известно, что $BK=BN$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.
40. В параллелограмме $KLMN$ точка P – середина стороны LM . Известно, что $PK=PN$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

41. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ в четыре раза больше площади треугольника AOB .
42. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K . Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ в четыре раза больше площади треугольника AKD .
43. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ в четыре раза больше площади треугольника BOC .
44. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K . Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ в четыре раза больше площади треугольника BKS .
45. Биссектрисы углов A и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , лежащей на стороне BC . Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB , AD и CD .
46. Биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K , лежащей на стороне CD . Докажите, что точка K равноудалена от прямых AB , BC и AD .
47. Биссектрисы углов C и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P , лежащей на стороне AB . Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC , CD и AD .
48. Биссектрисы углов B и C трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O , лежащей на стороне AD . Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB , BC и CD .
49. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O . Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.
50. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке P . Докажите, что площади треугольников APB и CPD равны.
51. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке M . Докажите, что площади треугольников AMB и CMD равны.
52. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке K . Докажите, что площади треугольников AKB и CKD равны.
53. Точка E – середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.
54. Точка K – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.
55. Точка M – середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника MCD равна половине площади трапеции.
56. Точка P – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника PAB равна половине площади трапеции.
57. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E . Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.
58. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K . Докажите, что сумма площадей треугольников BKS и AKD равна половине площади трапеции.
59. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку F . Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади трапеции.
60. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку M . Докажите, что сумма площадей треугольников BMC и AMD равна половине площади трапеции.

61. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4 и 64, $BD = 16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
62. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 7 и 28, $BD = 14$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
63. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 45, $BD = 15$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
64. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 2 и 32, $BD = 8$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
65. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K . Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.
66. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M . Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.
67. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке P . Докажите, что треугольники PAB и PCD подобны.
68. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке O . Докажите, что треугольники OBC и ODA подобны.
69. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.
70. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.
71. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы CDB и CAB равны. Докажите, что углы BCA и BDA также равны.
72. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.
73. Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится равносторонний треугольник.
74. Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный шестиугольник.
75. Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится квадрат.
76. Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный восьмиугольник.

3. Окружности

77. Окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках K и L , причём точки P и Q лежат по одну сторону от прямой KL . Докажите, что прямые PQ и KL перпендикулярны.
78. Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D , причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD . Докажите, что CD и EF перпендикулярны.
79. Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B , причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB . Докажите, что прямые AB и IJ перпендикулярны.

80. Окружности с центрами в точках M и N пересекаются в точках S и T , причём точки M и N лежат по одну сторону от прямой ST . Докажите, что прямые MN и ST перпендикулярны.

81. Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $a:b$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $a:b$.

82. Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m:n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m:n$.

83. Окружности с центрами в точках O и O_1 не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m:n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m:n$.

84. Окружности с центрами в точках M и P не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m:k$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m:k$.

85. В остроугольном треугольнике ABC точки A , C , центр описанной окружности O и центр вписанной окружности I лежат на одной окружности. Докажите, что угол ABC равен 60° .

86. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60° . Докажите, что точки A , C , центр описанной окружности треугольника ABC и точка пересечения высот треугольника ABC лежат на одной окружности.