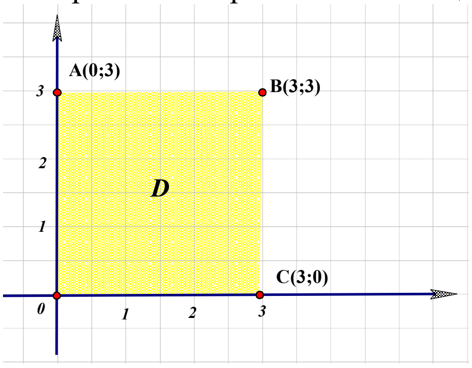
ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значение функции y=f(x) в замкнутой области D, заданной неравенствами $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27,\ 0 \le x \le 3,\quad 0 \le y \le 3$

Решение:

Изобразим на чертеже область заданной функции:



1) Найдем критические точки функции. Для этого найдем частные производные функции :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 + y^2 - 9xy + 27\right)'_x = 2x - 9y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y^2 - 9xy + 27)'_y = 2y - 9x$$

Найдем нули частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 9y = 0 \\ -9x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x - 81y = 0 \\ -18x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Итак, получена критическая точка О (0;0).

Вычислим значение функции в этой критической точке: $z(0;0) = 0 + 0 - 0 + 27 = 27$

Исследуем функцию на границах области, которая состоит из четырех отрезков: ОС (на оси Ох), ОА (на оси Оу), АВ (на прямой y=3) и СВ (на прямой x=3)

1) Исследуем функцию на отрезке ОС оси Ох.

В этом случае y=0. Тогда заданная функция принимает вид: $z(x;0) = \left(x^2 + y^2 - 9xy + 27\right)_{y=0} = x^2 + 27$ и становится функцией от одной переменной.. Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $z(x;0) = x^2 + 27$ на отрезке [0; 3].

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 + 27\right)' = 2x.$$

Производная $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \ \ \text{при} \ \ x = 0$, то есть x=0 – критическая точка. Найдем значение функции в критической точке, (которая совпадает с левым концом отрезка) и на конце отрезка при x=3.

$z(0;0) = 27$ - это найдено

$z(3;0) = 3^2 + 27 = 9 + 27 = 36$

Итак, на отрезке оси Ох мы имеем: $z_{наиб(0x)} = 36.\quad z_{наим(0x)} = 27$

2) Исследуем функцию на отрезке ОА оси Оу.

В этом случае x=0. Тогда функция принимает вид $z(0;y) = \left(x^2 + y^2 - 9xy + 27\right)_{x=0} = y^2 + 27$ и становится функцией от одной переменной *y*. Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $z(0;y) = y^2 + 27$ на отрезке [0; 3].

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(y^2 + 27\right)' = 2y.$

Производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ равна нулю при 2y=0, то есть y=0 – критическая точка. Найдем значение функции в критической точке, (которая совпадает с левым концом отрезка) и на конце отрезка при y=3.

$z(0;0) = 27$ - это найдено

$z(0;3) = 3^2 + 27 = 9 + 27 = 36$

Итак, на отрезке OA мы имеем: $z_{наиб(OA)} = 36.$ $z_{наим(OA)} = 27$.

3) Исследуем функцию на отрезке AB прямой y=3.

На прямой y=3 функция имеет вид $z(x;3) = \left(x^2 + y^2 - 9xy + 27\right)_{y=3} = x^2 + 3^2 - 9 \cdot 3 \cdot x + 27 = x^2 - 27x + 36$ и становится функцией от одной переменной *x*.

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $z(x;3) = x^2 - 27x + 36$ на отрезке [0; 3].

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 - 27x + 36\right)'_x = 2x - 27.$

Производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ равна нулю при 2x-27=0, то есть, при x=27/2. Таким образом, x=27/2 – критическая точка. Но x=27/2 не принадлежит области D. Тогда найдем значение этой функции на концах отрезка при x=0 и x=3.

$z(0;3) = 36$ - это найдено

$z(3;3) = 3^2 - 27 \cdot 3 + 36 = -36$

Итак, на границе AB прямой y=3 мы имеем: $z_{наиб(AB)} = 36,$ $z_{наим(AB)} = -36$.

4) Исследуем функцию на отрезке CB прямой x=3.

На прямой x=3 функция имеет вид $z(3;y) = \left(x^2 + y^2 - 9xy + 27\right)_{x=3} = 3^2 + y^2 - 9 \cdot 3 \cdot y + 27 = y^2 - 27y + 36$ и становится функцией от одной переменной *y*.

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $z(3;y) = y^2 - 27y + 36$ на отрезке [0; 3].

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(y^2 - 27y + 36\right)'_y = 2y - 27.$

Производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ равна нулю при 2y-27=0, то есть, при y=27/2. Таким образом, y=27/2 – критическая точка. Но y=27/2 не принадлежит области D. Поэтому найдем значение этой функции на концах отрезка [0; 3] при y=0 и y=3.

$z(3;0) = 36$ - это найдено

$z(3;3) = 3^2 - 27 \cdot 3 + 36 = -36$ - это найдено

Итак, на отрезке CB прямой y=3 мы имеем: $z_{наиб(CB)} = 36.$ $z_{наим(CB)} = -36$.

Сравнивая наибольшее и наименьшее значения функции на границах области, получаем, что в данной области D $z_{наиб} = 36,$ $z_{наим} = -36$

<u>Ответ:</u> $z_{наиб} = z(3;0) = z(0;3) = 36,$ $z_{наим} = z(3;3) = -36$