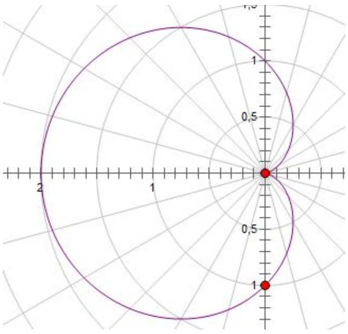
Вычисление площади фигуры в полярных координатах

Задача:
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 1 - \cos\varphi$

Решение:
Построим фигуру, площадь которой требуется найти. Уравнение $\rho = 1 - \cos\varphi$ задает кардиоиду. Функция, задающая кардиоиду, определена для всех действительных значений угла и является периодической с периодом 2π. Поэтому, при вычислении площади в качестве нижнего предела интегрирования можно взять любое число, а верхний предел интегрирования взять на 2π больше нижнего. Построим заданную кардиоиду:



Вычислим площадь фигуры, которую ограничивает кардиоида $\rho = 1 - \cos\varphi$, для $\varphi \in [0; 2\pi]$. Для этого воспользуемся формулой: $S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\varphi) d\varphi$

Так как кардиоида – симметричная фигура, то сначала найдем половину площади.

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1-\cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_o^{\pi} \left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\pi - 2\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

Итак, $\frac{S}{2} = \frac{3}{4}\pi$, следовательно, $S = \frac{3}{2}\pi$

Ответ: $\frac{3}{2}\pi$

www.gghelp.ru