

## Вычисление неопределенных интегралов от дробно-рациональных функций

**Задача:**

Вычислить интеграл  $\int \frac{(x+2) dx}{x^2(x-1)}$

**Решение:**

Прежде, чем считать данный интеграл, упростим подынтегральное выражение, а именно, представим его в виде суммы простейших дробей.

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2}{x^2(x-1)} = \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (B-A)x - B}{x^2(x-1)} \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-A=1 \\ -B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ -2-A=1 \\ B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=3 \\ A=-3 \\ B=-2 \end{cases}$$

Теперь запишем исходную дробь в виде суммы простейших дробей:  $\frac{x+2}{x^2(x-1)} = -\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x-1}$

Вот теперь можно считать интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+2) dx}{x^2(x-1)} &= \int \left( \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int \frac{3}{x-1} dx - \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{2}{x^2} dx = 3 \int \frac{d(x-1)}{x-1} - 3 \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x^2} = \\ &= 3 \ln|x-1| - 3 \ln|x| + \frac{2}{x} + C = 3 \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \frac{2}{x} + C \end{aligned}$$

**Ответ:**  $3 \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \frac{2}{x} + C$