Степенные ряды

Задача:

Определить интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n^2}$ и исследовать на сходимость на границах интервала

Решение:

Для нахождения области сходимости ряда применим признак Даламбера. Имеем:

$$u_n=\frac{(-x)^{n-1}}{n^2};\quad u_{n+1}=\frac{(-x)^n}{(n+1)^2}.$$

Найдем предел отношения абсолютных величин этих членов при $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-x)^n}{(n+1)^2}:\frac{(-x)^{n-1}}{n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-x)^n}{(-x)^{n-1}}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(-x)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right|=|-x|\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right|=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=|x|\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n^2}{n^2+2n+1}}_{\to 1}=|x|$$

Итак, по признаку Даламбера, ряд абсолютно сходится при значениях *x*, удовлетворяющих неравенству $|x|<1$. То есть, интервалом сходимости данного ряда является интервал (-1; 1) с радиусом сходимости R=1.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала, то есть, при $x=1$ и $x=-1$.

При $x=1$ ряд принимает вид $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$. Полученный ряд является знакочередующимся. Для его исследования применим признак Лейбница. Так как члены этого ряда по абсолютной величине убывают, $\left(1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\ldots\right)$ и предел общего члена равен нулю $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\right)$, то согласно признаку Лейбница этот ряд сходится. Таким образом, точка x=1 принадлежит области сходимости исходного ряда.

При $x=-1$ ряд принимает вид $\sum\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$. Этот ряд является обобщенным гармоническим рядом $\sum\frac{1}{n^\alpha}$. Известно, что при $\alpha>1$ этот ряд сходится. Таким образом, точка $x=-1$ также входит в область сходимости ряда.

Итак, данный ряд сходится при все значениях *x*, удовлетворяющих неравенству $-1\le x\le 1$, то есть областью сходимости является промежуток $[-1;1]$.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n^2}$ сходится на промежутке $[-1;1]$