Числовые ряды

Задача:

Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

Решение:
Применим необходимый признак сходимости ряда. Для этого вычислим найдем предел общего члена данного ряда:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n =$$

Мы получили неопределенность вида $\{1^\infty\}$. Преобразуем последнее выражение так, чтобы можно было воспользоваться вторым замечательным пределом $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n}{-(n+1)}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right]}_{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-(n+1)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-(n+1)}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$$

Так как $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{e} \neq 0$, то есть, не выполняется необходимый признак сходимости $\left(\lim_{n\to\infty} u_n = 0\right)$, то данный ряд расходится

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ расходится