Степенные ряды

Задача:

Определить интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n$

Решение:

Для нахождения области сходимости ряда применим признак Даламбера. Имеем:

$$u_n=\frac{2^n}{n(n+1)}x^n;\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+1)}x^{n+1}$$

Найдем предел отношения абсолютных величин этих членов при $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\cdot x^{n+1}}{(n+1)(n+1)}:\frac{2^n\cdot x^n}{n(n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\cdot x^{n+1}\cdot n(n+1)}{(n+1)(n+1)\cdot 2^n\cdot x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2xn}{n+1}\right|=2\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)}_{\to 1}|x|=2|x|$$

Таким образом, по признаку Даламбера ряд сходится при значениях *x*, удовлетворяющих неравенству $2|x|<1$ или $|x|<\frac{1}{2}$. То есть, интервалом сходимости данного ряда является интервал $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ с радиусом сходимости $R=\frac{1}{2}$.

Выясним поведение ряда на границах интервала, то есть, при $x=\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{2}$.

При $x=-\frac{1}{2}$ данный ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}=-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$. Это знакочередующийся ряд. Для его исследования применим признак Лейбница.

Так как: 1) $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$ 2) $\frac{1}{1\cdot 2}>\frac{1}{2\cdot 3}>\frac{1}{3\cdot 4}>\dots$, то выполняются оба условия признака Лейбница, и, следовательно, ряд сходится, т.е., $x=-\frac{1}{2}$ принадлежит области сходимости ряда.

При $x=\frac{1}{2}$ ряд принимает вид: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$

Так как $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\dots$

Частичная сумма *n* первых членов этого ряда после раскрытия скобок и сокращения будет равна $1-\frac{1}{n+1}$. Тогда $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$. Так как предел частичных сумм равен 1, то данный ряд сходится, и сумма этого ряда равна 1.

Итак, при $x=\frac{1}{2}$ ряд сходится, то есть, $x=\frac{1}{2}$ принадлежит области сходимости.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n$ сходится в интервале $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ и расходится вне этого интервала