ОЛИМПИАДА. 9 КЛАСС. РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

9.1. Положительные числа a, b, c таковы, что точка $K(1; 2)$ расположена вне параболы $y = ax^2 + bx + c$. Определите, как эта точка расположена по отношению к параболе $y = cx^2 + bx + a$.

Ответ. Вне параболы.

Решение. Заметим, что при $x = 1$ обе параболы проходят через точку A с координатами $(1; a + b + c)$. Раз точка K лежит вне первой параболы, и ветви первой параболы направлены вверх, то она лежит ниже точки A (то есть $2 < a+b+c$). Но так как ветви второй параболы также направлены вверх и точка K лежит ниже точки A параболы, то K лежит и вне второй параболы.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

9.2. Из произведения трех последовательных натуральных чисел вычли их сумму и получили нечетное число N. Докажите, что число N является произведением каких-то трех последовательных нечетных чисел.

Решение. Пусть $m - 1, m, m + 1$ — исходные числа. Тогда $N = (m - 1)m(m + 1) - ((m - 1) + m + (m + 1)) = m(m^2 - 1) - 3m = m(m^2 - 4) = (m - 2)m(m + 2)$. Числа $m - 2, m, m + 2$ либо последовательные четные, либо последовательные нечетные числа. Но так как N — нечетное, то и числа $m - 2, m, m + 2$ — нечетные, что и требовалось.

9.3. В классе больше 20, но меньше 30 учеников, дни рождения у всех различны. Петя сказал: «Тех, кто старше меня в классе, в два раза больше тех, кто младше меня». Катя сказала: «Тех, кто старше меня в классе, в три раза меньше тех, кто младше меня». Сколько учеников в классе?

Ответ. 25 учеников.

Решение. Пусть в классе x ребят младше Пети, тогда $2x$ ребят старше Пети. Итак, в классе $3x+1$ ребят. Пусть в классе y ребят старше Кати, тогда $3y$ ребят младше Кати. Итак, в классе $4y + 1$ ребят. Это означает, что число учеников в классе имеет вид $N = 3x + 1$ и $N = 4y + 1$, откуда $N - 1 = 3x$ и $N - 1 = 4y$. Таким образом, число $N - 1$ делится и на 3, и на 4, то есть оно делится на 12. Единственное такое число между 19 и 29 — это 24. Значит, $N - 1 = 24$, откуда $N = 25$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 3 балла.

Доказано, что количество учеников в классе имеет вид $3x + 1$ при целом x — 2 балла.

Доказано, что количество учеников в классе имеет вид $4y + 1$ при целом y — 2 балла.

9.4. Точки A_1, B_1, C_1 — соответственно середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — соответственно центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, $A_1B_1C_1$. Докажите, что O_4 — точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$.

Решение. Отметим, что треугольники AC_1B_1 и A_1B_1C равны (стороны каждого из них равны половинам сторон треугольника ABC). А в равных треугольниках расстояния от центров описанных окружностей до соответственных сторон одинаковы. Значит, точки O_1 и O_3 находятся на одинаковом расстоянии от стороны AC, откуда следует, что прямая O_1O_3 параллельна прямой AC, то есть она параллельна средней линии A_1C_1 треугольника ABC.

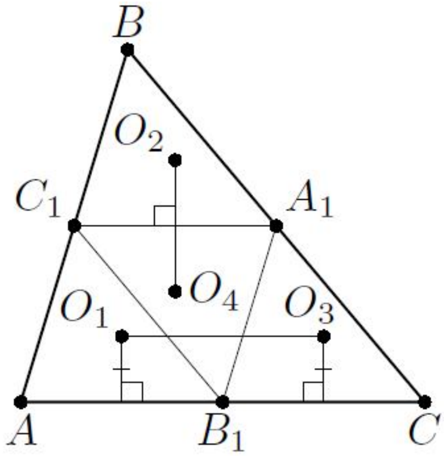

Рис. 5

Центр описанной около треугольника окружности лежит на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника. Значит, точки O_2 и O_4 лежат на серединном перпендикуляре к общей стороне A_1C_1 треугольников A_1BC_1 и $A_1B_1C_1$. Поэтому прямая O_2O_4 перпендикулярна прямой A_1C_1, а, значит, перпендикулярна прямой O_1O_3. Это означает, что точка O_4 лежит на высоте треугольника $O_1O_2O_3$, проведенной из вершины O_2. Аналогично, она лежит и на других высотах этого треугольника, то есть является точкой пересечения его высот. Утверждение доказано.

Комментарий. Доказано только, что треугольники AC_1B_1 и B_1A_1C равны — 0 баллов.

Доказано, что прямая O_1O_3 параллельна прямой AC — 3 балла.

Доказано, что O_2O_4 перпендикулярен AC (или A_1C_1) — 2 балла.

9.5. Внучка выкопала на огороде 45 репок, веса которых — все натуральные числа от 1 до 45. Могла ли внучка дать по 15 репок деду и бабке так, чтобы выполнилось следующее условие: какие бы две своих репки ни положили на одну чашку весов дед и бабка — по одной каждый, внучка сможет положить на другую чашку весов одну или две свои репки так, чтобы весы уравновесились?

Ответ. Могла.

Решение. Приведём один из возможных примеров. Пусть дед получил репки с весами $1, 4, 7, \ldots, 43$, бабка — с весами $2, 5, 8, \ldots, 44$, а у внучки остались репки с весами $3, 6, 9, \ldots, 45$ (иначе говоря, веса внучкиных репок делятся на 3, веса дедкиных дают остаток 1, а веса бабкиных — остаток 2 при делении на 3). Тогда сумма весов двух репок (бабки и деда) будет делиться на 3, и будет принимать значения от $1 + 2 = 3$ до $43 + 44 = 87 = 29 \cdot 3$. Веса от 3 до 45 внучка может уравновесить одной своей репкой, а веса от $48 = 45 + 3$ до $87 = 45 + 42$ — двумя репками.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Верный пример без обоснования — 3 балла.