ОЛИМПИАДА. 8 КЛАСС. РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

8.1. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2011. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ. Уменьшится на 2013.

Решение. Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1) = xy+y-x-1$. Произведение увеличилось на 2011, то есть $y-x-1 = 2011$ или $y-x = 2012$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x-1)(y+1) = xy-y+x-1$. Заметим, что $xy-y+x-1 = xy-(y-x)-1 = xy-2012-1 = xy-2013$. То есть произведение уменьшилось на 2013.

Комментарий. Верный ответ без обоснования (или разобранный пример какой-то пары чисел) — 3 балла.

Несущественная арифметическая ошибка при правильном решении — снимать не более 2 баллов.

8.2. От шоссе к четырем поселкам A, B, C, D последовательно отходят четыре дороги. Известно, что путь по дороге-шоссе-дороге от A до B равен 9 км, от A до C — 13 км, от B до C — 8 км, от B до D — 14 км. Найдите длину такого пути от A до D.

Ответ. 19 км.

Решение. Пусть длина дороги от шоссе до поселка B равна b. Путь от A до C можно заменить на более длинный — через поселок B. Он длиннее на удвоенный путь от шоссе до B. Значит, $2b = 9+8-13$, откуда $b = 2$.

Теперь заменим путь от A до D более длинным — через поселок B. Его длина равна $9+14 = 23$. Значит, длина пути от A до D равна $23 - 2 \cdot 2 = 19$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 1 балл.

Приведен пример длин всех дорог (без обоснования) — 3 балла.

ла.

8.3. Найдите все тройки положительных чисел, для которых выполняется равенство $a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1)=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)$.

Ответ. $a=b=c=1$.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть. Используем то, что $x^2(x-1)-x(x-1)=(x^2-x)(x-1)=x(x-1)^2$. Получим $a(a-1)^2+b(b-1)^2+c(c-1)^2=0$. Так как a, b, c — положительные числа, слева стоит сумма неотрицательных слагаемых. Их сумма равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Но это возможно только при $a=b=c=1$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Ошибочным является рассуждения вида: «если $a^2>a$, то $a^2(a-1)>a(a-1)$». Такое «доказательство» должно оцениваться в 0 баллов.

8.4. На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается либо прибавить к одному из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли, что всегда можно добиться того, чтобы на доске остались только нули, сделав не более 23 ходов?

Ответ. Неверно.

Решение. Пусть вначале на доске написаны числа 1, 2 и 9, и через несколько ходов из них получились нули. Если из 9 в результате получился ноль, то вычитание производилось хотя бы девять раз. Значит, и из остальных чисел вычиталось хотя бы по девять единиц; значит, к 1 надо было сделать не меньше восьми прибавлений, а к двойке — не меньше семи. Итоговое количество ходов, таким образом, не меньше $9+8+7=24$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Приведен пример тройки чисел 1, 2, 9, но не приведено верное доказательство того, что в этом случае потребуется больше 23 ходов — 2 балла.

8.5. На сторонах BC и BA треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E так, что $DE \parallel AC$. Оказалось, что биссектрисы углов AED и EDC пересекаются в точке F, лежащей на стороне AC. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, является центром окружности, описанной около треугольника EDF.

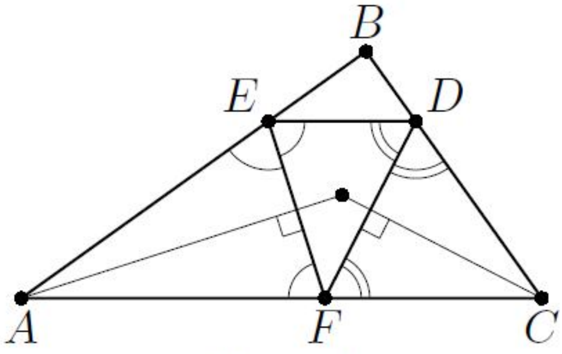

Рис. 4

Решение. Из параллельности следует, что $\angle AFE = \angle FED = \angle AEF$. Значит, треугольник AEF — равнобедренный: $AE = AF$. Значит, биссектриса угла EAF является медианой и высотой треугольника AEF, то есть серединным перпендикуляром к стороне EF. Аналогично, биссектриса угла DCF является серединным перпендикуляром к стороне DF.

Центр окружности, вписанной в треугольник ABC — это точка пересечения упомянутых биссектрис, а центр окружности, описанной около EDF — это точка пересечения упомянутых серединных перпендикуляров. Значит, эти точки совпадают.

Комментарий. Доказано, что треугольник AEF (или DCF) равнобедренный — 2 балла.