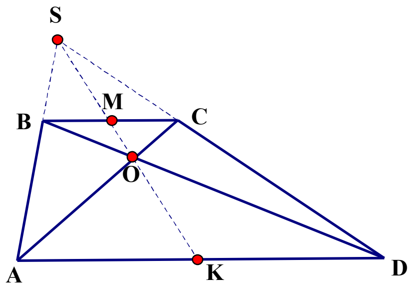
ТРАПЕЦИЯ И ЕЕ ТОЧКИ

Четыре замечательные точки трапеции

Во всякой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Доказательство.



Известно, что через две точки можно провести единственную прямую. Проведем такую прямую через точки S и O. Докажем, что прямая SO делит основания пополам

Для удобства введем обозначения: $BM = x,\ MC = y,\ \ AK = t,\ KD = u$

Первая пара подобных треугольников: BSM и ASK. Из подобия следуют отношения: $\frac{BM}{AK} = \frac{SM}{SK}$, (1)

Вторая пара подобных треугольников: CSM и DSK. Из подобия следуют отношения: $\frac{MC}{KD} = \frac{SM}{SK}$ (2)

Из равенств (1) и (2) следует: $\frac{BM}{AK} = \frac{MC}{KD}$, т.е. $\frac{x}{t} = \frac{y}{u}$

Третья пара подобных треугольников: BMO и DKO. Из подобия следуют отношения: $\frac{BM}{KD} = \frac{MO}{OK}$ (3)

Четвертая пара подобных треугольников: CMO и AOK. Из подобия следую отношения: $\frac{MC}{AK} = \frac{MO}{OK}$ (4)

Из равенств (3) и (4) следует: $\frac{BM}{KD} = \frac{MC}{AK}$, т.е., $\frac{x}{u} = \frac{y}{t}$

Составим их полученных равенств систему и перемножим равенства:

$\begin{cases} \frac{x}{t} = \frac{y}{u} \\ \frac{x}{u} = \frac{y}{t} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{tu} = \frac{y^2}{tu}$, откуда следует, что $x^2 = y^2$, а значит, $x = y$, а значит, и $u = v$.

Таким образом, мы доказали, что BM=MC и AK=KD.