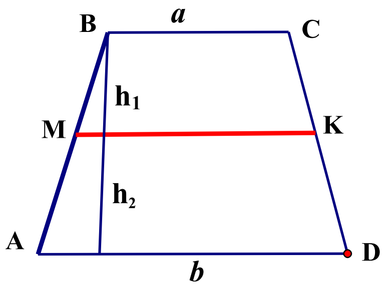
СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧНОЕ (quadratic average)

Длина отрезка, делящего трапецию на две равновеликие, равна ***среднему квадратичному*** *оснований.*



$$MK = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Доказательство

Пусть площадь трапеции равна S. Для удобства введем обозначения: $S_{MBCK} = S_1, \quad S_{AMKD} = S_2$

Тогда $S_1 = S_2 = \dfrac{S}{2}$

Напишем формулу площади трапеции ABCD

$$S = \frac{a+b}{2}\cdot(h_1+h_2)$$

$$\frac{S}{2} = S_1 = \frac{a+MK}{2}\cdot h_1 \qquad \frac{S}{2} = S_2 = \frac{b+MK}{2}\cdot h_2$$

Составим систему из следующих равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{2} = S_1 \\ S_1 = S_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a+b}{2}(h_1+h_2) = \dfrac{a+MK}{2}\cdot h_1 \\ \dfrac{a+MK}{2}\cdot h_1 = \dfrac{b+MK}{2}\cdot h_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a+b}{2}(h_1+h_2) = (a+MK)\cdot h_1 \\ (a+MK)\cdot h_1 = (b+MK)\cdot h_2 \end{cases}$$

Поделим обе части первого уравнения на h_1

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2}\left(\dfrac{h_1+h_2}{h_1}\right) = a+MK \\ \dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{a+MK}{b+MK} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a+b}{2}\left(1+\dfrac{h_2}{h_1}\right) = a+MK \\ \dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{a+MK}{b+MK} \end{cases}$$

Подставим значение $\dfrac{h_2}{h_1}$ в первое уравнение. Получим:

$$\frac{a+b}{2}\left(1+\frac{a+MK}{b+MK}\right) = a+MK$$

$$(a+b)\left(\frac{b+MK+a+MK}{b+MK}\right) = 2(a+MK)$$

$$(a+b)(a+2MK+b) = 2(a+MK)(b+MK)$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые

$$a^2 + 2aMK + ab + ab + 2bMK + b^2 = 2\left(ab + aMK + bMK + MK^2\right)$$

$$a^2 + \cancel{2aMK} + ab + ab + \cancel{2bMK} + b^2 = 2ab + \cancel{2aMK} + \cancel{2bMK} + 2MK^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + 2MK^2$$

$$a^2 + b^2 = 2MK^2$$

$$MK^2 = \frac{a^2+b^2}{2}, \quad MK = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$ Ч.т.д.