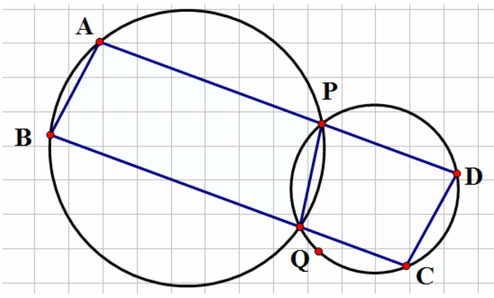
Тренировочная работа от 28 января 2014

Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую – в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую – в точке C.
а) докажите, что ABCD – параллелограмм
б) найдите отношение BP : PC, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй



Что используем:

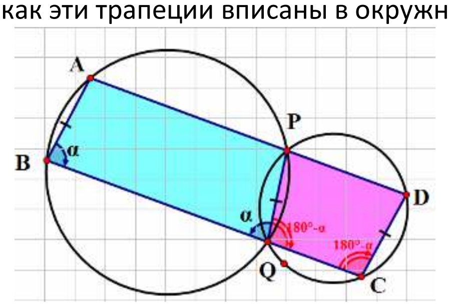
1. определение параллелограмма (попарно параллельные стороны)
2. свойство равнобедренной трапеции (углы при основании равны)
3. свойство смежных углов
4. признак параллельности прямых (внутренние односторонние углы)
5. теорема синусов
6. формулы приведения

Как решаем:

а) Докажем, что ABCD – параллелограмм.

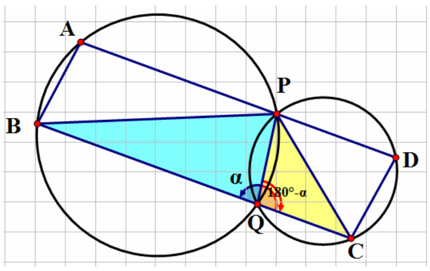
Для этого воспользуемся определением параллелограмма: параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

1) Рассмотрим два четырехугольника: ABQP и PDCQ. Так как по условию AD и BC параллельны, то данные четырехугольники – трапеции. А так как эти трапеции вписаны в окружности, то они равнобедренные.



2) Таким образом, мы получаем, что в трапеции ABQP $\angle B = \angle Q = \alpha$
3) Применяя свойство смежных углов, получаем, что угол Q трапеции PDCQ равен $(180^0 - \alpha)$. Он же, в свою очередь, равен углу C.
4) Тогда сумма углов B и C равна 180^0. Но эти углы являются внутренними односторонними при прямых AB и CD и секущей BC. Значит, прямые AB и CD параллельны.

б) Найдем отношение BP:PC



1) Применим теорему синусов в треугольниках BPC и PQC. Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{BP}{\sin\alpha} = 2R \\ \dfrac{PC}{\sin(180^0 - \alpha)} = 2r \end{cases}$$

2) Учитывая что $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$ и разделив почленно первое уравнение на второе, получим $BP : PC = R : r = 2$ (по условию).

Ответ: 2