

КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА ЕГЭ

I. КОМБИНАТОРНОЕ СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ (ПРАВИЛА КОМБИНАТОРНОГО «И» И «ИЛИ»)

Комбинаторное сложение (правило «или»)

Пусть во множестве A n элементов, а во множестве B m элементов. Тогда выбор одного элемента из множества A или B можно выполнить $m+n$ способами.

Пример:

На одной полке 30 книг, а на другой 18 книг. Все книги разные. Сколькими способами можно выбрать одну книгу?

Решение:

Множество A – книги с первой полки ($m=30$)

Множество B – книги со второй полки ($n=18$)

Тогда одну книгу можно выбрать $18+30=48$ способами

Комбинаторное умножение (правило «и»)

Пусть во множестве A n элементов, а во множестве B – m элементов. Тогда число пар вида $(a;b)$, где $a \in A, b \in B$, будет равно $m \cdot n$

Пример:

Имеется 4 конверта: белый, красный, синий и желтый. Сколькими способами можно на эти конверты наклеить марки следующих стран: Россия, Германия, Италия, США, Франция.

Решение:

Множество A – конверты ($m=4$)

Множество B – марки ($n=5$)

Число пар «конверт-марка» $4 \cdot 5=20$

КОМБИНАТОРНОЕ СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ. ЗАДАЧИ

		Вид	Решение
1.	При формировании экипажа космического корабля имеется 10 претендентов на пост командира, 20 - на пост инженера и 25 - на пост космонавта. Иван Иванов годен на любую должность. Сколько у него вариантов получить пост?	Σ	$10+20+25=55$
2.	При формировании экипажа космического корабля имеется 10 претендентов на пост командира и 20 на пост инженера. Сколькими способами можно сформировать экипаж корабля, состоящий из командира и инженера?	Π	$10 \cdot 20=200$
3.	Сколькими способами можно выбрать в столовой обед из трех блюд, если предложено два первых блюда, три вторых и два вида десерта?	Π	$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$
4.	Каждая из 5 различных коммерческих организаций намеревается принять на работу одного из 9 выпускников коммерческого отделения факультета МЭО. В каждой из этих организаций выпускнику предлагается на выбор одна из 3 должностей. Сколько существует вариантов распределения этих выпускников на работу?	Π	$5 \cdot 9 \cdot 3 = 135$
5.	В коробке лежат маркеры 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Вова нужно подчеркнуть подобные слагаемые. Сколькими способами Вова может достать из коробки какой-нибудь пишущий предмет?	Σ	$7 + 4 = 11$
6.	Идя на соревнование, баскетболист Петя надевает либо майку, либо футболку. Сколько вариантов выбора одежды у него имеется, если его мама приготовила для него 3 майки и 4 футболки?	Σ	$3 + 4 = 7$
7.	Собираясь на сборы, баскетболист Петя берет с собой одну футболку и одну майку. В шкафу у Пети 3 майки и 4 футболки. Сколькими способами Петя может выбрать себе один комплект?	Π	$3 \cdot 4 = 12$

8.	Девушка собирается на вечеринку. Самые модные в ее гардеробе – 5 платьев, 4 сумочки и 3 пары туфель. Сколько времени ей предстоит провести перед зеркалом, если известно, что на примерку каждого комплекта вида "платье-сумочка-туфли" у нее уходит 7 минут?	П	$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
9.	Девушка собирается на вечеринку. Самые модные в ее гардеробе – 5 платьев, 4 сумочки и 3 пары туфель. Сколько всевозможных комплектов ей предстоит примерить, если туфли она уже выбрала?	П	$5 \cdot 4 = 20$
10	Дошкольница Маша пришла с мамой в магазин, где увидела 9 разных кукол, 5 видов конструкторов "Лего", 8 видов игрушечных автомобилей и 6 разных мячей. Маша очень любит куклы и мячи. Но мама сказала, что купит Маше лишь одну игрушку. Сколькими способами Маша может выбрать себе подарок?	Σ	$9 + 6 = 15$
11	Дошкольники Маша и Витя пришли с родителями в игрушечный магазин, в котором продаются 9 разных кукол, 5 видов конструкторов "Лего", 8 видов игрушечных автомобилей и 6 разных мячей. Маша очень любит куклы и мячи, а Витя - машинки и "Лего". Родители хотят купить два подарка Маше (куклу и мяч) и два подарка Вите (машинку и "Лего"). Сколькими способами можно выбрать эти подарки?	П (П; П)	$(9 \cdot 6) \cdot (8 \cdot 5) = 2160$
12	Дошкольники Маша и Витя пришли с родителями в игрушечный магазин, в котором продаются 9 разных кукол, 5 видов конструкторов "Лего", 8 видов игрушечных автомобилей и 6 разных мячей. Маша очень любит куклы и мячи, а Витя - машинки и "Лего". Родители хотят купить два подарка Маше (куклу и мяч) и один подарок Вите (к сожалению, Витя подрался в детском саду). Сколькими способами можно выбрать эти подарки?	П(П; Σ)	$(9 \cdot 6) \cdot (8 + 5) = 702$
13	Дошкольники Маша и Витя вчера уронили папин ноутбук, чем очень разозлили папу. Но потом дети исключили из ноутбук ненужные части и сделали из него хорошую и крепкую папку для бумаг. Папа перестал злиться и отвел их в тот самый игрушечный магазин. Предпочтения Маша и Вити остались прежними, но, к сожалению, после случившегося папа решил купить им по одному подарку. Сколькими способами можно выбрать эти подарки?	П (Σ; Σ)	$(9 + 6) \cdot (8 + 5) = 195$

II. ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ, РАЗМЕЩЕНИЯ

Имеется 3 куска материи одинакового размера и разных цветов. Сколько различных флагов с горизонтальными полосами можно составить из этих кусков?

Решение: (К-красный, Б- белый, С-синий)

К Б С
К С Б
Б С К
Б К С
С Б К
С К Б

Ответ: 6 флагов.

Перестановка из n элементов (P_n) – это всевозможные комбинации, которые можно составить из ВСЕХ элементов данного множества.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Сочетание из n элементов по k элементов (C_n^k) - это комбинации, которые составлены из k элементов данного множества и отличаются хотя бы одним элементом

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Размещение из n элементов по k элементов (A_n^k) – это комбинации из k элементов, отличающиеся либо элементами, либо их порядком

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки – это частный случай размещения $P_n = A_n^n$

Связь между формулами:

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k$$

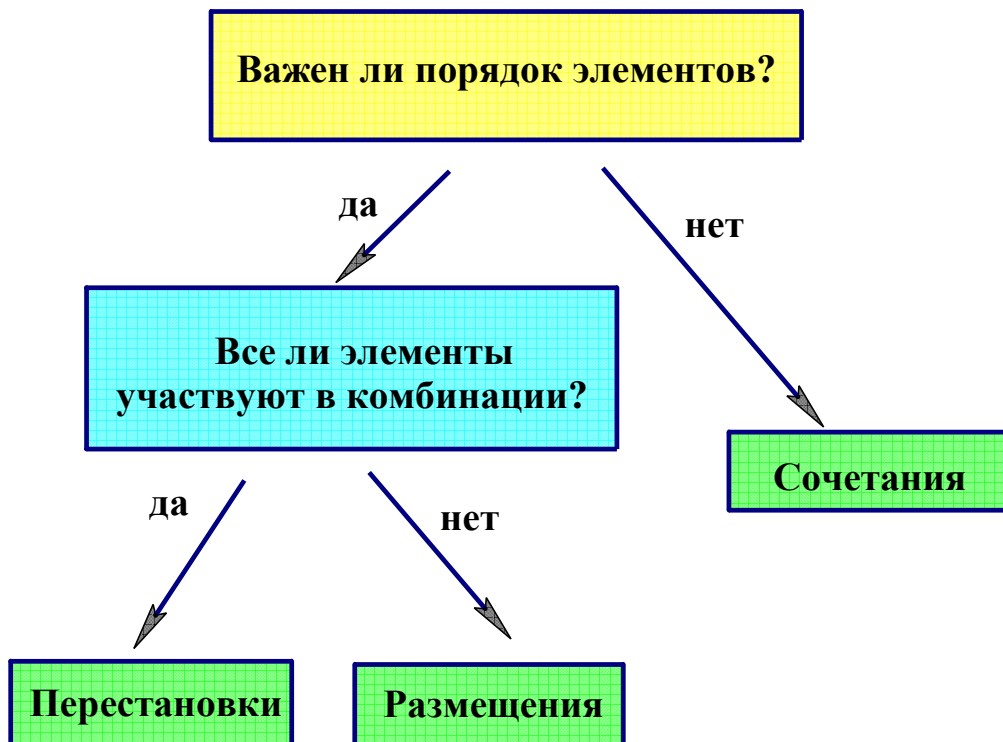
Таким образом, число размещений A_n^k больше числа сочетаний C_n^k в $k!$ раз

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ И СОЧЕТАНИЯ

			1		1			
			1	2	1			
		1	3	3	1			
		1	4	6	4	1		
	1	5	10	10	5	1		
	1	6	15	20	15	6	1	
	1	7	21	35	35	21	7	1
1	8	28	56	70	56	28	8	1

C_6^3 - найти строку с числом 6, отсчитать на строке 3 позиции, (исключая единицу). Получаем число 20

СХЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИДА КОМБИНАЦИИ:



ПЕРЕСТАНОВКИ. СОЧЕТАНИЯ. РАЗМЕЩЕНИЯ. ЗАДАЧИ

1. В понедельник в пятом классе 5 уроков: музыка, математика, русский язык, литература и история. Сколько различных способов составления расписания на понедельник существует?	$P_5=5!=120$
2. В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать?	$C_9^2 = 36.$
3. В спортивной команде 9 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?	$A_9^2 = 72.$
4. Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола 6 гостей на 6 стульях?	$P_6=6!=720$
5. Сколькими способами 10 футбольных команд могут разыграть между собой золотые, бронзовые и серебряные медали?	$A_{10}^3 = 720.$
6. В меню столовой предложено на выбор 2 первых блюда, 6 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обеда, состоящего из первого, второго и третьего блюда, можно составить?	$\Pi=2 \cdot 6 \cdot 4 = 48.$
7. Имеется 6 видов овощей. Решено готовить салаты из трёх видов овощей. Сколько различных вариантов салатов можно приготовить?	$C_6^3 = 20$
8. В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими разными способами можно выбрать покупку из одного блокнота и одной ручки?	$\Pi=4 \cdot 7 = 28.$
9. В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими способами можно выбрать покупку из двух разных блокнотов и одной ручки?	$C_7^2 \cdot 4=21 \cdot 4 = 84.$
10. На прививку в медпункт отправились 7 друзей. Сколькими разными способами они могут встать в очередь у медицинского кабинета?	$P_7 = 7! = 5040.$
11. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить при помощи цифр 4, 7, 9? (Цифры в записи числа не повторяются).	$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$
12. Сколько различных двузначных чисел можно составить при помощи цифр 4, 7, 9? (Цифры в записи числа не повторяются).	$A_3^2 = 6.$
13. Сколько нечетных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 8, 6? (Цифры в записи числа не могут повторяться).	$A_3^2 = 2 \cdot 3 = 6.$
14. Сколько четных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6? (Цифры в записи числа не могут повторяться).	$A_3^2 + A_3^2 = 6+6=12.$
15. Сколькими способами тренер может определить, кто из 10 спортсменов побежит в эстафете 4×100 м на первом, втором, третьем и четвёртом этапах?	$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$
16. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 при условии, что в записи числа каждая цифра используется только один раз?	$A_9^3 = 504$
17. Сколькими способами из 7 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?	$C_7^3 = 35$
18. В соревновании участвуют 12 команд. Сколько существует вариантов распределения призовых (1, 2, 3) мест?	$A_{12}^3 = 1320$
19. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?	$P_4=24$
20. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?	$C_{10}^6 = 210$
21. В 9 классе учатся 7 учащихся, в 10 - 9 учащихся, а в 11 - 8 учащихся. Для работы на пришкольном участке надо выделить двух учащихся из 9 класса, трех – из 10, и одного – из 11. Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?	$C_7^2 \cdot C_9^3 \cdot C_8^1 = 14112$
22. Сколько существует делителей числа 210?	$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 16$
23. В корзине лежат 9 черных шаров и 7 красных. Мальчик достает 2 шара одинакового цвета. Сколькими способами он может это сделать?	$C_9^2 + C_7^2 = 36 + 21 = 57$
24. В корзине лежат 8 белых шаров и 12 черных. Сколькими способами можно достать из этой корзины 2 белых шара и 2 черных?	$C_8^2 + C_{12}^2 = 28 + 66 = 94$

25. У Пети есть 4 монеты по 1 рублю и 2 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, достал из кармана 1 монету номиналом 1 рубль и еще 1 монету номиналом 10 рублей. Сколькими способами он может выбрать эти монеты?	$C_4^1 \cdot C_2^1 = 8$
26. В ларьке продаются 15 роз и 18 тюльпанов. Ученик 9-го класса хочет купить 3 цветка для своей одноклассницы, причем все цветы должны быть одинаковыми. Сколькими способами он может составить такой букет	$C_{15}^3 + C_{18}^2$

КОМБИНАТОРИКА НА ОЛИМПИАДАХ

«Покори Воробьевы горы!», 2014, 10-11кл

Сколькими способами можно выбрать бригаду из 3 маляров и 4 штукатуров, если имеется 6 маляров и 8 штукатуров? (1400)

«Физтех», 2011, 9-11 кл

На некоторой прямой произвольным образом отмечены 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует треугольников и четырехугольников с вершинами в этих точках? (4170)

«Физтех», 2014, 7-8 кл

Сколько различных натуральных делителей имеет число 15552? (42)

«Физтех», 2014, 9 кл

У Васи есть 7 книг по математике, а у Вани – девять. Все 16 книг разные. Сколькими способами они смогут обменяться тремя книгами (то есть, дать три книги в обмен на три книги)? (2940)

«Высшая проба», 2013, 11 кл

В классе 12 учеников. Сколькими способами их можно разбить на две группы (первую и вторую), состоящие из четного числа человек? (2046)

«Покори Воробьевы горы!», 2014, 10-11кл

Сколькими способами тренер может скомплектовать хоккейную команду, состоящую из одного вратаря, двух защитников и трех нападающих, если в его распоряжении есть 2 вратаря, 5 защитников и 8 нападающих? (1120)

«Покори Воробьевы горы!», 2014, 10-11кл

Из трех математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию, в состав которой войдет семь человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия? (1596)