ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема: Функция и плотность распределения

Задача:

Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{v-1}, & x\in[2,5;4]\\ 0 & ,\ x\notin[2,5;4]\end{cases}$ случайной величины *x*.

Найти:

а) параметр v
б) математическое ожидание
в) дисперсию и среднее квадратическое отклонение
г) вероятность выполнения неравенства $3<x<3,3$

Решение:

а) Для нахождения параметра v воспользуемся формулой $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$. Получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{2,5}p(x)dx+\int\limits_{2,5}^{4}p(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{2,5}0dx+\int\limits_{2,5}^{4}\frac{1}{v-1}dx=\frac{1}{v-1}\int\limits_{2,5}^{4}dx=\frac{1}{v-1}(4-2,5)=\frac{1,5}{v-1}=\frac{3}{2(v-1)}$$

Таким образом, имеем при $v\neq 1$: $\dfrac{3}{2(v-1)}=1$, откуда $v=2,5$.

Итак, $v=2,5$

б) Найдем математическое ожидание M(x) по формуле: $M(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx$

Для нашей задачи имеем:

$$M(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{2,5}x\cdot 0dx+\int\limits_{2,5}^{4}x\frac{1}{v-1}dx+\int\limits_{4}^{+\infty}x\cdot 0dx=\int\limits_{2,5}^{4}x\frac{1}{v-1}dx=\int\limits_{2,5}^{4}x\frac{1}{1,5}dx=\frac{2}{3}\int\limits_{2,5}^{4}xdx=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{2,5}^{4}=\frac{1}{3}\left(4^2-2,5^2\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(4-\frac{5}{2}\right)\left(4+\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{13}{2}=\frac{13}{4}=3,25.$$

Итак, $M(x)=3,25$

в) Найдем дисперсию $D(x)$ по формуле $D(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(x)\right]^2p(x)dx$

Для нашей задачи имеем:

$$D(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-3,25)^2p(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{2,5}0\cdot(x-3,25)^2dx+\int\limits_{2,5}^{4}p(x)(x-3,25)^2dx+\int\limits_{-4}^{+\varphi}0\cdot(x-3,25)^2dx=$$

$$=\int\limits_{2,5}^{4}(x-3,25)^2p(x)dx=\int\limits_{2,5}^{4}\frac{1}{v-1}(x-3,25)^2dx=\int\limits_{2,5}^{4}\frac{1}{2,5-1}(x-3,25)^2dx=$$

$$\int\limits_{2,5}^{4}\frac{1}{1,5}(x-3,25)^2dx=\frac{2}{3}\int\limits_{2,5}^{4}(x-3,25)^2dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x-3,25)^3}{3}\bigg|_{2,5}^{4}=\frac{2}{9}\cdot\left[(4-3,25)^3-(2,5-3,25)^3\right]=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\left(0,73^3+0,75^3\right)=\frac{2}{9}\cdot 2\cdot\left(0,75\right)^3=\frac{4}{3^2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{4\cdot 3^3}{3^2\cdot 4^3}=\frac{3}{4^2}=\frac{3}{16}=0,1875$$

Итак, $D(x)=0,1875\approx 0,19$

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$$

Имеем: $\sigma(x)=\sqrt{0,1875}\approx 0,433$

Итак, $\sigma(x)\approx 0,19$

г) Найдем $P(3<x<3,3)$

Для нахождения вероятности попадания случайной величины x в интервал (3; 3,3) воспользуемся формулой распределения $P(a<x<b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Для нашей задачи имеем: $a=3,\;\; b=3,3\;\;\; f(x)=\frac{1}{v-1}=\frac{2}{3}$.

Таким образом, искомая вероятность будет равна

$$P(3<x<3,3)=\int\limits_3^{3,3}\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3}\int\limits_3^{3,3}dx=\frac{2}{3}x\Big|_3^{3,3}=\frac{2}{3}(3,3-3)=0,2$$

Итак, $P(3<x<3,3)=0,2$