

ТЕМА 18.1 ТРЕУГОЛЬНИК - ОКРУЖНОСТЬ.

1. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причем $AD=R$.

а) Докажите, что треугольник ABC – прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F соответственно. Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

2. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$

а) Докажите, что четырехугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $OBKC$, если $\cos \angle BAC = 3/5$, а $BC = 48$.

3. В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC , AC и AB соответственно.

AH - высота, $\angle BCA = 45^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$

а) Докажите, что A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.

4. Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника делит сторону BC .

5. Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKB , если $\cos \angle B = 2/3$, $AC = 36$, а площадь треугольника AKC равна $126\sqrt{5}$

6. В остроугольном треугольнике ABC угол BAC в два раза больше угла ABC . Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника AOC , пересекает отрезок BC в точках S и P .

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.

б) Найдите AB , если $BC = 6$ и $AC = 4$.

7. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K , а окружность, описанную около треугольника ABC , в точке M .

а) Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KMC , если $AC = 4$, $BC = 5$ и $AB = 6$.

8. Периметр треугольника ABC равен 36. Точки E и F – середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC .

а) Докажите, что $AC = 9$

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle ACB = 90^\circ$.

Ответы: 1) 40 2) 25 3) 1 4) 5:4 5) $14/(\sqrt{5})$ 6) 5 7) $4/(\sqrt{7})$ 8) 54